UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Dept. Computación y Tecnología de la Información
Estructuras Discretas II
CI 2526
Mayo-Julio 2021

Práctica 2

Recomendaciones

Libro Logicomix (no es un libro de texto).

Videos de MIT OpenCourseWare (no todos se usan en Estructuras Discretas II).

Videos de historia:

- Undecidability Tangent (History of Undecidability Part 1) - Computerphile
- Barber & Russell Paradoxes (History of Undecidability Part 2) - Computerphile
- Turing Meets Paradoxes (History of Undecidability Part 3) - Computerphile

Por si les interesa ese profesor tiene muchos videos en el canal Computerphile:

- Professor D. Brailsford in Computerphile
- 50 Years of Computer Science: Professor Brailsford Q&A - Computerphile

1. Suponga que F_n es el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Los números de Fibonacci se definen inductivamente como:
$$F_0 = 0, F_1 = 1$$
y
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$
para n>1. Use el principio de inducción fuerte para demostrar que:
$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ (F_n < 2^n)$$

Respuesta

Definimos la proposición:
$$P(n) \equiv (F_n < 2^n)$$
Pasos base:
$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ 2^0 &= 1 \end{aligned}$$
$\therefore P(0)$
$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ 2^1 &= 2 \end{aligned}$$
$\therefore P(1)$

Paso inductivo:

Hipótesis: $(\forall k, 0 \leq k < n) \quad P(k)$
$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} && \text{(por definición)} \\ F_n &< 2^{n-1} + 2^{n-2} && \text{(por hipótesis inductiva)} \\ F_n &< 2^{n-1} + 2^{n-1} && (2^{n-2} < 2^{n-1}) \\ F_n &< 2^n \end{aligned}$$
$\therefore \ (\forall k, 0 \leq k < n, \quad P(k)) \implies P(n)$

$\therefore \ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad P(n)$ ∎

2. Use el principio de inducción fuerte para demostrar que todo número natural $n \geq 2$, puede ser escrito como producto de números primos.

Respuesta

Definimos la proposición:
$$P(n) \equiv (n \text{ puede ser escrito como producto de números primos})$$

Paso base:

$$2 = 2 \qquad \text{(un producto con un solo factor)}$$

$\therefore P(2)$

Paso inductivo:

Hipótesis: $(\forall k, 2 \leq k < n) \quad P(k)$

Tesis: $P(n)$

Si n es primo entonces:

$$n = n \qquad \text{(un producto con un solo factor)}$$

Si n no es primo entonces n puede factorizarse en dos factores menores que n:

$$\exists p, q, 1 < p < n, 1 < q < n, \quad n = p \times q$$

Por la hipótesis inductiva tanto p como q se pueden escribir como producto de números primos:

$$p = p_1 \times \ldots \times p_r$$
$$q = q_1 \times \ldots \times q_s$$

Entonces:

$$n = p_1 \times \ldots \times p_r \times q_1 \times \ldots \times q_s$$

$\therefore \ (\forall k, 2 \leq k < n, \quad P(k)) \implies P(n)$

$\therefore \ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq 2 \implies P(n))$ $\blacksquare$

3. Use el principio de buen orden para demostrar que todo número natural $n \geq 2$, puede ser escrito como producto de números primos.

Pistas:

Principio de buen orden: todo subconjunto no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo.

Estrategia para demostrar $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ usando el principio de buen orden:

a) Definir la proposición $P(n)$.

b) Definir el conjunto de contraejemplos:

$$C = \{n \in \mathbb{N} : \neg P(n)\}$$

c) Suponer que C no es vacío. Por el principio de buen orden C debe de tener un mínimo m.

d) Llegar a una contradicción encontrando un elemento de C menor a m o llegar a una contradicción probando $P(m)$.

e) Concluir, por lo tanto, que el conjunto C de contraejemplos es vacío: $C = \varnothing$.

Respuesta

Definimos la proposición:

$$P(n) \equiv (n \text{ puede ser escrito como producto de números primos})$$

Definimos el conjunto de contraejemplos:

$$C = \{n \in \mathbb{N} : \neg P(n)\}$$

Supongamos que C no es vacío. Por el principio de buen orden C debe de tener un mínimo m.

Si m es primo entonces tendríamos:

$$m = m \qquad \text{(un producto con un solo factor)}$$

Si m no es primo entonces m puede factorizarse en dos factores menores que m:

$$\exists p, q, 1 < p < m, 1 < q < m, \quad m = p \times q$$

Como p y q son menores que m sabemos que $P(p)$ y $P(q)$, es decir ambos puedes ser escritos como productos de números primos:

$$p = p_1 \times \ldots \times p_r$$
$$q = q_1 \times \ldots \times q_s$$

Entonces:

$$m = p_1 \times \ldots \times p_r \times q_1 \times \ldots \times q_s$$

Es decir m puede ser escrito como producto de números primos. Esto contradice $\neg P(m)$.

Por lo tanto el conjunto C de contraejemplos es vacío: $C = \varnothing$. $\blacksquare$

4. En un torneo cada jugador juega con cada uno de los otros jugadores exactamente una vez, y en cada juego hay exactamente un ganador y un perdedor. Decimos que los jugadores $p_1, p_2, \ldots, p_n$ forman un ciclo si p_1 le gana a p_2, p_2 le gana a $p_3, \ldots, p_{n-1}$ le gana a p_n y p_n le gana a p_1.

   Use el principio de buen orden para demostrar que si hay un ciclo $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(n \geq 3)$ en un torneo, entonces hay un ciclo de largo 3.

   Respuesta

   Definimos la proposición:

$$P(n) \equiv (\text{un ciclo } p_1, p_2, \ldots, p_n (n \geq 3) \implies \text{un ciclo de largo } 3)$$

   Definimos el conjunto de contraejemplos:

$$C = \{n \in \mathbb{N} : \neg P(n)\}$$

   Supongamos que C no es vacío. Por el principio de buen orden C debe de tener un mínimo m.

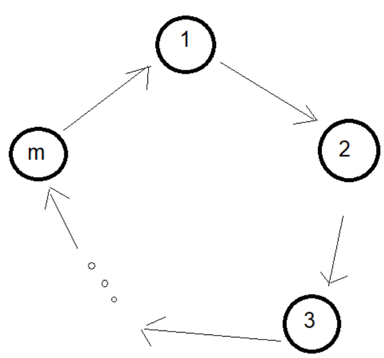
   Sabemos que $\neg P(m)$

   Recuerden:

$$\neg(p \implies q) \equiv (p \wedge \neg q)$$

   Entonces hay un ciclo $p_1, p_2, \ldots, p_m (m \geq 3)$ y no hay un ciclo de largo 3.

   Como no hay un ciclo de largo 3, m tiene que ser mayor que 3.



   ¿Qué pasó en el juego entre p_2 y p_m?

   Si p_2 le ganó a p_m entonces p_1, p_2 y p_m forman un ciclo de largo 3. Contradicción.

   Si p_2 perdió con p_m entonces:

   Si $m = 4$ entonces p_2, p_3 y p_m forman un ciclo de largo 3. Contradicción.

   Si $m > 4$ entonces $p_2, p_3, \ldots, p_m$ forman un ciclo de lartgo $m - 1$ sin ciclo de largo 3. Eso sería un contraejemplo de tamaño $m - 1$. Pero esto contradice que m es el mínimo de C.

   En todos los casos hay una contradicción. Por lo tanto el conjunto C de contraejemplos es vacío: $C = \varnothing$. ∎

5. El único barbero de un pueblo (Sevilla en la versión musical) afeita a todos los que no se afeitan solos y no afeita a los que se afeitan solos.

   a) Tradicional pregunta: ¿el barbero se afeita solo?

   b) Pregunta alternativa: ¿qué podemos concluir acerca del barbero?

   Respuestas

   a) Es una paradoja. Tanto contestar sí como contestar no lleva a una contradicción:

   Si se afeita solo entonces por definición no se afeita a si mismo.

   Si no se afeita solo entonces por definición sí se afeita a si mismo.

   Esto se conoce como la paradoja del barbero. Bertrand Russell la usaba para ilustrar la paradoja que lleva su apellido.

   b) El barbero es mujer o es lampiño o tiene una barba larguísima.

6. Algunos adjetivos se describen a sí mismos y otros no. Por ejemplo, çorta.[es] una palabra corta pero "larga"no es una palabra larga. Çastellana.[es] una palabra castellana pero ïnglesa"no es una palabra inglesa. "Polisílaba.[es] una palabra polisílaba pero "monosílaba"no es una palabra monosílaba.

   Como el significado de un adjetivo describe a sí mismo o no, podemos dividir los adjetivos en dos grupos. Si el significado de un adjetivo describe a sí mismo lo llamaremos autológico y si no se describe a si mísmo lo llamaremos heterológico.

   Describa el problema que hay con una de estas definiciones.

   Respuesta

   El adjetivo autológico puede ser autológico sin problema.

   El adjetivo heterológico, ¿es heterológico?

   Si el adjetivo heterológico es heterológico entonces se describe a si mismo y, por definición, es autológico.

   Si el adjetivo heterológico es autológico entonces no se describe a si mismo y, por definición, es heterológico.

   Esta paradoja se llama la paradoja de Grelling-Nelson. Es muy parecida a la paradoja de Russell.

   Todas estas paradojas incluyen autorreferencias.

7. Opcional: Un animal está en un punto A en la Tierra, camina 1 km hacia el sur, luego 1 km al este y finalmente 1 km al norte y, al haber hecho eso, regresa al punto A.

   a) Si el animal es un oso, ¿de qué color es?

   b) Si no es un oso, ¿cuál otra especie de animal podría ser?

   Respuestas

   a) Blanco. El punto A es el polo norte.

   b) Pingüino. El punto A está cerca del polo sur y es tal que al ir 1 km hacia el sur llega a un punto B y al ir 1 km al este vuelve a B. Es decir que al ir 1 km al este da la vuelta a la Tierra.

Problemas no resueltos en clase de práctica

8. Demuestre que la no existencia de sucesiones decrecientes infinitas en los naturales, es equivalente al principio de buen orden en los naturales.

   Respuesta

   a) Supongamos el principio de buen orden: todo subconjunto no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo.

   Supongamos que existe una sucesión decreciente infinita en los naturales $a_1, a_2, \ldots$ entonces, por el principio de buen orden, el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots\}$ tiene un mínimo. Llamémoslo a_k.

   Como la sucesión es decreciente tenemos $a_{k+1} < a_k$, pero esto contradice que a_k es mínimo.

   Por lo tanto, no existe una sucesión decreciente infinita en los naturales.

   b) Supongamos que no existen sucesiones decrecientes infinitas en los naturales.

   Supongamos que existe un subconjunto no vacío de números naturales que no tiene un elemento mínimo.

   Tomemos como a_1 cualquier elemento de ese conjunto, como no tiene mínimo existe un a_2 en ese conjunto tal que $a_2 < a_1$.

   Como a_2 no es mínimo existe un a_3 en ese conjunto tal que $a_3 < a_2$.

   En general, como a_k no es mínimo existe un a_{k+1} en ese conjunto tal que $a_{k+1} < a_k$.

   Pero esto contradice que no existen sucesiones decrecientes infinitas en los naturales.

   Por lo tanto, no existe un subconjunto no vacío de números naturales que no tiene un elemento mínimo.

   Por lo tanto, todo subconjunto no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo.

   El último paso se basa en la siguiente generalización de una ley de De Morgan:

   $$\neg\exists S\ \neg P(S) \equiv \forall S\ P(S)$$

9. Consiga una biyección entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$.

   Respuesta

   Definamos

   $$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
   $$f(n,m) = \frac{(n+m+1)(n+m)}{2} + m$$

   Probemos sobreyectividad:

   Sea $N \in \mathbb{N}$, la preimagen de ese punto será el par ordenado $(c - N + \sum_{i=1}^{c} i, N - \sum_{i=1}^{c} i)$, donde c es el mayor natural donde $\sum_{i=1}^{c} i \leq N$. Demostremos que $(c - N + \sum_{i=1}^{c} i, N - \sum_{i=1}^{c} i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, para esto basta con verificar que $c - N + \sum_{i=1}^{c} i \geq 0$ y $N - \sum_{i=1}^{c} i \geq 0$. (debo esta demostración)

Efectivamente $(c - N + \sum_{i=1}^{c} i, N - \sum_{i=1}^{c} i)$ es la preimagen de N ya que

$$f(c - N + \sum_{i=1}^{c} i, N - \sum_{i=1}^{c} i)$$

$$= \frac{(c - N + \sum_{i=1}^{c} i + N - \sum_{i=1}^{c} i + 1)(c - N + \sum_{i=1}^{c} i + N - \sum_{i=1}^{c} i)}{2} + N - \sum_{i=1}^{c} i$$

$$= \frac{(c+1)c}{2} + N - \sum_{i=1}^{c} i$$

$$= \frac{(c+1)c}{2} + N - \frac{(c+1)c}{2}$$

$$= N$$

Probemos inyectividad:

Tenemos dos casos

Caso 1: $n + m = c \wedge n' + m' = c$

$$f(n, m) = f(n', m')$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{(n+m+1)(n+m)}{2} + m = \frac{(n'+m'+1)(n'+m')}{2} + m'$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{(c+1)c}{2} + m = \frac{(c+1)c}{2} + m'$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$m = m'$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$m = m' \wedge m = m'$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$-m = -m' \wedge m = m'$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$c - m = c - m' \wedge m = m'$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$n = n' \wedge m = m'$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(n, m) = (n', m')$$

Caso 2: $n + m = c \wedge n' + m' = c' \wedge c < c'$

(n,m) y (n',m') deben ser distintos ya que si fuesen iguales la suma de sus coordenadas fuesen iguales y por lo tanto $c = c'$, por esta razón probemos la inyectividad por el contra recíproco de $f(n,m) = f(n',m') \Rightarrow (n,m) = (n',m')$, por lo que para este caso basta con demostrar que $f(n,m) \neq f(n',m')$ ya que sabemos que $(n,m) \neq (n',m')$.

Demostremos primero que

$$\frac{(c+1)c}{2} + c < \frac{(c'+1)c'}{2}$$

Como $c < c'$ entonces $c' = c + 1 + k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$\frac{(c'+1)c'}{2}$$

$$= \frac{(c+1+k+1)(c+1+k)}{2}$$

$$= \frac{(c+1)c + kc + c + c + 1 + k + 1 + (c+1+k+1)k}{2}$$

$$= \frac{(c+1)c + 2c + 2 + kc + k + (c+1+k+1)k}{2}$$

$$= \frac{(c+1)c}{2} + c + 1 + \frac{kc + k + (c+1+k+1)k}{2} > \frac{(c+1)c}{2} + c.$$

Hemos demostrado que $\frac{(c+1)c}{2} + c < \frac{(c'+1)c'}{2}$, pero como $n \geq 0$ tenemos que

$$\frac{(c+1)c}{2} + c - n < \frac{(c'+1)c'}{2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{(c+1)c}{2} + m < \frac{(c'+1)c'}{2}$$

$$\Longleftrightarrow < m' \geq 0 >$$

$$\frac{(c+1)c}{2} + m < \frac{(c'+1)c'}{2} + m'$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{(n+m+1)(n+m)}{2} + m < \frac{(n'+m'+1)(n'+m')}{2} + m'$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f(n,m) < f(n',m')$$

$$\Rightarrow$$

$$f(n,m) \neq f(n',m')$$

$\blacksquare$